Leçon 223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

On ne s'intéresse qu'à des suites à valeurs réelles, càd à des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Suites et convergence. —

1. Limite d'une suite. —

– Def : Une suite indexée par $\mathbb{N}$ à valeurs réelles est la donnée d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On la note $(u_n)_n$ où $u_n = f(n)$.
– Def : Convergence, limite. Si $u_n \to \pm\infty$, alors u_n diverge vers $\pm\infty$. La suite diverge sinon.
– Pro : La limite est unique.
– Ex : $u_n = \frac{1}{n} \to 0$, $v_n = n$ diverge vers $+\infty$.
– Appli : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ ssi pour toute suite $u_n \to a$, $f(u_n) \to f(a)$.
– Ex : La fonction $x \mapsto sin(\frac{1}{x})$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
– Rem : Une suite convergente est bornée. Contre-ex : $(-1)^n$ bornée mais pas convergente.
– Pro : Pour $(u_n)_n, (v_n)_n$ de limites a,b, et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_n+\lambda.v_n \to a+\lambda.b$. L'ensemble des suites convergentes est un $\mathbb{R}-ev$.
– De plus, $u_n.v_n \to a.b$, et si $a \neq 0$ alors $u_n \neq 0$ àpcr et $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{a}$.

2. Valeurs d'adhérence. —

– Def : Suite extraite. On se donne $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, et on regarde $v_n = u_{\varphi(n)}$.
– Pro : Si u_n CV alors toutes ses suites extraites cv. Contre-Ex : $u_n = n.\chi_{2\mathbb{N}} + 1$ possède u_{2n+1} comme suite extraite convergente, mais ne diverge.
– Def : Les valeurs d'adhérence de u_n sont l'ensemble des limites des suites extraites convergentes de u_n.
– Ex : Les valeurs d'adhérence de $u_n = (-1)^n$ sont $\{-1, 1\}$. Pour u_n k-périodique, ses valeurs d'adhérence sont $\{u_0, \ldots, u_{k-1}\}$.
– Pro : L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé.
– Ex : Pour $u_n = 2 + cos(n\pi)$, ses valeurs d'adhérence sont $[1, 3]$.
– Rem : Si u_n est convergente alors elle possède une unique valeur d'adhérence.

3. Théorèmes de convergence. —

– Thm : Une suite croissante majorée ou décroissante minorée sont convergentes.
– App : $(inf_k(u_n))_k, (sup_k(u_n))_k \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}^{\mathbb{N}}$ sont soit convergentes, soit divergentes vers $\pm\infty$.
Si u_n est minorée (resp majorée) alors $\liminf(u_n)$ est l'inf des val. d'adh. de u_n (le sup des val. d'adh. pour $\limsup(u_n)$ sinon).
– Ex : Pour $u_n = 1 + cos(n\pi)$, $liminf(u_n) = 1$, $limsup(u_n) = 3$.
– Théorème des gendarmes : Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec v_n, w_n convergentes de même limite l, alors $u_n \to l$.
– Ex : $u_n = \frac{cos(n)}{n}$ converge vers 0.
– Pro : Suites adjacentes. Si $u_n \leq v_n$ avec u_n, v_n décroissante, et $v_n - u_n \to 0$, alors u_n et v_n sont convergentes de même limite l.
– Ex : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ sont adjacentes et convergent vers 1.
– App : Pour $(a_n)_n$ à termes positifs et décroissante vers 0, la suite des $\sum_n(-1)a_n$ est donc convergente.
– Pro : Pour tout $k \geq 0$, la suite $(u_{n+k})_n$ a les mêmes valeurs d'adhérence et la même convergence que $(u_n)_n$. Ainsi, les conditions demandées sur u_n pour trouver une convergence ou non peuvent être seulement demandées àpcr.
– Rem : Une suite possédant plus de 2 valeurs d'adhérence est divergente.
– Théorème de Bolzano-Weierstrass : Toute suite numérique bornée possède une suite extraite convergente. Il découle de l'axiome des segments emboîtés.
– Ainsi, sur $\mathbb{R}$, une suite est convergente ssi elle est bornée et possède une unique valeur d'adhérence.

4. Suites de Cauchy. —

– Def : Suite de Cauchy.
– Pro : a) Toute suite convergente est de Cauchy.
b) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
c) Toute suite de Cauchy est bornée.
– Thm : Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente. Cela découle de l'axiome des segments emboîtés.
– Ex : La suite $u_n = \sum_k \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car pas de Cauchy : $|u_{2n} - u_n| \geq \frac{1}{2}$.
– Ex : Suites sous-additives. Si $u_{n+m} \leq u_n + u_m$, alors $\frac{u_n}{n}$ est convergente ou diverge vers $-\infty$, et on a $lim(\frac{u_n}{n}) = \inf_n(\frac{u_n}{n}) \in [-\infty, +\infty[$.

2. Exemples de suites particulières. —

1. Suites arithmétiques et géométriques. —

– Def : Suite arithmétique de raison a $u_{n+1} = u_n + a$. Alors $u_n = u_0 + n.a$.
– Def : Suite géométrique de raison q : $u_{n+1} = q.u_n$. Alors $u_n = u_0.q^n$.
– Une suite arithmétique diverge vers $\pm\infty$. Une suite géométrique converge vers 0 pour $|q| < 1$, diverge vers $\pm\infty$ pour $|q| > 1$, et est constante/périodique si $q = \pm 1$.

2. Suites homographiques. —

– Def : u_n vérifie une récurrence homographique si $u_{n+1} = \frac{a.u_n+b}{c.u_n+d}$ avec $ad - bc \neq 0$.
Elle est bien définie si $u_n \neq \frac{-d}{c}$, $\forall n$.
– Pro : On considère l'équation $\frac{a.u_n+b}{c.u_n+d} = x \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0$.
1) Si l'équation a deux racines distinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors on a $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = (\frac{a-\alpha.c}{a-\beta.c})^n.\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$.
2) Si l'équation a une racine double $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{1}{u_0-\alpha} + \frac{c}{a-\alpha.c}.n$.
– Ex : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, $u_0 = 1$. L'équation associée est $x^2 = 0$, donc $\frac{1}{u_n} = 1 + n$, càd $u_n = \frac{1}{n+1} \to 0$.

– Ex : Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = \frac{a.u_n+b}{1}$. Si $a = 1$, u_n est arithmétique de raison 1. Sinon, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a, et $u_n = a^n(u_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a})$.

3. Suites récurrentes. —

– Def : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$. On appelle suite récurrente une suite vérifiant $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
– Pro : Soit u_n suite récurrente.
1) Si f est croissante, u_n est monotone et son sens de monotonie est donné par $sgn(u_1 - u_0)$.
2) Si f est décroissante, les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de monotonie opposés.
– Pro : Si u_n converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$. Ainsi, si f est continue sur I et si $f(I) \subset [a, b]$ alors u_n récurrente et convergente $\Rightarrow$ u_n converge vers un point fixe de f.
– Ex : Pour $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$, on a $u_n \to 1$.
– Ex : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. Si u_n converge, sa limite est -1 ou 3.
– Théorème du point fixe de Picard : Pour F un fermé de $\mathbb{R}$ et $f : F \to F$ qui est k-Lipschitzienne, $k < 1$, f admet un unique point fixe s dans F et toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers s.
On a même : $|u_{n+1} - s| \leq k|u_n - s| \leq k^{n+1}|u_0 - s|$. (vitesse de convergence linéaire)
– Def+Pro : On dit que u_n converge quadratiquement vers s ssi il existe $0 < M < min(1, \frac{1}{|u_0-s|})$ tel que $|u_{n+1} - s| \leq M.|u_n - s|^2$.
On a alors $|u_n - s| \leq \frac{M^{2^{n+1}}}{M}.|u_0 - s|^{2^n} \leq M^{2^n}\frac{(M|u_0-s|)^{2^n}}{M}$.
– **Dev** : Méthode de Newton polynomiale : Pour P un polynôme réel à racines réelles simples $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$, la fonction $\Phi : x \in [\lambda_r, +\infty[\mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)} \in [\lambda_r, +\infty[$ est bien définie.
Pour tout $x_0 \in [\lambda_r, +\infty[$, la suite récurrente définie par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ converge linéairement vers λ_r et quadratiquement àpcr.
– App : Cela permet d'approcher rapidement des zéros de polynômes comme $x^2 - a$. Si P est un polynôme à coefficients rationnels, alors $x_n \in \mathbb{Q}$.

3. Comportements asymptotiques. —

1. Comparaison asymptotique. —

– Def : u_n est négligeable devant une suite réelle positive v_n, ce qu'on note $u_n = o(v_n)$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon v_n$.
– Ex : Si $u_n \to 0$, on a $u_n = o(1)$.
– Def : u_n est un $O(v_n)$ si il existe $M > 0$ tq $u_n \leq M.v_n$ àpcr.
– u_n est équivalente) v_n, $u_n \sim v_n$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, on a $(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n)$ àpcr. C'est-à-dire $(u_n - v_n) = o(|u_n|)$.
– Thm : Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs, avec $u_n \sim v_n$.
1) Si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n v_n$ aussi et $\sum_{k\geq n} u_k \sim \sum_{k\geq n} v_k$.
2) Si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ aussi et $\sum_{k\leq n} u_k \sim \sum_{k\leq n} v_k$.
– App : Le développement asymptotique de $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ est $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n})$, où $\gamma = \lim((H_n - \log(n))_n)$.

2. Formule de Stirling. —

– Pro : Soit a_n une suite. On définit $u_n = a_{n+1} - a_n$ et $\sum_n u_n$ la série télescopique associée à a_n.
Alors la suite a_n et la suite $\sum_n u_n$ ont même nature, et en cas de convergence on a $\sum_{n\geq 0} u_n = \lim(a_n) - a_0)$.
– App : Formule de Stirling : $n! \sim (\frac{n}{e})^n.\sqrt{2\pi n}$.

3. Comparaison en moyenne. —

– Pro : Moyenne de Césaro : Si u_n converge vers l, alors $v_n = \frac{u_0+\cdots+u_n}{n+1}$ converge vers l. On dit que u_n converge en moyenne de Césaro vers l.
– App : Si u_{2n} converge vers a et u_{2n+1} converge vers b, alors u_n converge en moyenne de Césaro vers $\frac{a+b}{2}$.
– Pour $u_n = (-1)^n$, u_n diverge mais converge en moyenne de Césaro vers 0.
– Def : Un ordre moyen de $(u_n)_n$ est $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\sum_{n\leq x} u_n \sim \sum_{n\leq x} g(n)$.
– **Dev** : Ordre moyen de Φ et σ : Un ordre moyen de $\sigma(n) = \sum d|nd$ est $x \mapsto \frac{\pi^2}{6}x$, et $\sum_{n\leq x} \sigma_n = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(xlog(x))$.
Un ordre moyen de l'indicatrice d'Euler Φ est $x \mapsto \frac{6}{\pi^2}x$, et $\sum_{n\leq x} \sigma_n = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(xlog(x))$.

Références

Gourdon : Limite, valeur d'adhérence, convergence. Suites arithmético-géométriques. Suites homographiques. Suites récurrentes. o,O,$\sim$ de suites. Formule de Stirling. Exemples.
Amrani : Limite, valeurs d'adhérence, convergence. Comportement asymptotique, sommes de Césaro.
Rouvière : Méthode de Newton Polynomiale (Dev)
Tenenbaum : Ordre moyen de Phi et sigma (Dev)
Zuily, Queffélec :Def lim sup et liminf, théorèmes, exemples, suites sous-additives. Séries de Dirichlet.
Hauchecorne : Contre-Exemple de suites,séries ayant des problèmes.

June 10, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes